

Sia V un K -spazio vettoriale e $\varphi: V \rightarrow V$ un endomorfismo (un'applicazione lineare di V in se stesso)

$\lambda \in K$, λ autovalore di φ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists v \in V, v \neq 0_v: \varphi(v) = \lambda v$

Se $V = K^n$ (vogliamo dire di dimensione finita n)

$$\Rightarrow \lambda \text{ autovalore} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \text{ ha soluzioni non nulle; ossia,}$$

se e solo se il determinante del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \text{ è nullo}$$

$\Rightarrow \lambda$ autovalore di $\varphi \Leftrightarrow \lambda$ è radice dell'equazione in T :

$$|A - T I| = \begin{vmatrix} a_{11} - T & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - T & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - T \end{vmatrix} = 0 \quad \text{dove } A = M(\varphi);$$

tale determinante si chiama polinomio caratteristico di A o di φ [©] ed è di grado n .

Per cui, gli autovalori di φ sono le radici del polinomio caratteristico di φ che appartengono a K .

Sia V di dimensione finita o no e $\lambda \in K$ un autovalore di φ .

v autovettore di φ associato all'autovalore λ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \varphi_\lambda(v) = \varphi(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow$ l'insieme degli autovettori associati a λ è il nucleo di φ_λ definito da $\varphi_\lambda(v) = \varphi(v) - \lambda v$ (endomorfismo) per cui è un sottospazio di V , chiamato autospazio di φ associato all'autovalore λ e si denota con V_λ

$$\Rightarrow V_\lambda = \text{Ker } \varphi_\lambda.$$

Si dimostra che autovettori non nulli associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti; da cui segue, nel caso $V = K^n$, che se il polinomio caratteristico ha n radici in K distinte, esiste una base di V formata da autovettori di φ ed, in tal caso, φ si dice che è semplice.

[©] Siano A e B le matrici associate a φ rispetto alle basi F ed H rispettivamente. Si dimostra che A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico per cui si può definire polinomio caratteristico di φ .

Sia λ autovalore di φ , una radice di molteplicità r del polinomio caratteristico di φ . Sappiamo che $\dim V_\lambda = n - \rho(A - \lambda I)$. Si dimostra che $\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq r}$.

φ è semplice $\stackrel{\text{teor}}{\Leftrightarrow}$ 1) tutte le radici del polinomio caratteristico di φ sono in K ;
 2) $\dim V_\lambda = r_\lambda$ (la molteplicità di λ) ovvero,
 $n - \rho(A - \lambda I) = r_\lambda$.

cenno di dimostrazione: basta prendere come base formata da autovettori l'insieme F unione delle basi di ciascun autospazio
 $\Rightarrow M_{F, F}(\varphi)$ è una matrice diagonale, cioè:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{con } \lambda_1 \text{ ripetuto } r_1 \text{ volte} \\ \lambda_2 \text{ ripetuto } r_2 \text{ volte} \\ \dots \\ \lambda_m \text{ ripetuto } r_m \text{ volte} \\ \text{ed } r_1 + r_2 + \dots + r_m = n \end{array}$$

Una matrice si dice diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice P invertibile per cui risulta che la matrice $P^{-1}AP$ è diagonale.

Teorema: Sia $A \in K^{n,n}$ e sia $\varphi : K^n \rightarrow K^n$ l'endomorfismo associato ad A . allora si ha:

A è diagonalizzabile se e solo se φ è semplice

Infatti: se φ è semplice sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di K^n formata da autovettori di φ e sia P la matrice avente per colonne v_1, v_2, \dots, v_n (P è invertibile!) Allora $D = P^{-1}AP$ è diagonale ($PD = AP$) e gli elementi di D sono gli autovalori di φ , ripetuti ciascuno con la sua molteplicità. Viceversa se A è diagonale è ovvio che φ è semplice.