ESERCIZIO N° 1

In R^4 è assegnato il sottoinsieme $V = \{(x, x - 2y, y, t), x, y, t \in R\}$. Verificare che V è un sottospazio di R^4 e trovare una sua base.

Trovare un sottospazio S di R^4 tale che $V \oplus S = R^4$.

Per le proprietà che caratterizzano i sottospazi proviamo :

1) $(x_1, x_1 - 2y_1, y_1, t_1), (x_2, x_2 - 2y_2, y_2, t_2) \in V \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1, x_1 - 2y_1, y_1, t_1) + (x_2, x_2 - 2y_2, y_2, t_2) \in V$

infatti,

$(x_1, x_1 - 2y_1, y_1, t_1) + (x_2, x_2 - 2y_2, y_2, t_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - 2(y_1 + y_2), y_1 + y_2, t_1 + t_2) \in V$

2) $a \in R, (x, x - 2y, y, t) \in V \Rightarrow a(x, x - 2y, y, t) \in V$

infatti, $a(x, x - 2y, y, t) = (ax, ax - 2ay, ay, at) \in V$

3) per $x = y = t = 0 \Rightarrow (0, 0, 0, 0) \in V$

$\Rightarrow$ V è un sottospazio.

Si poteva osservare che è Imf=V dove $f: R^4 \to R^4$ è l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z,t) = (x,x-2y,y,t)$.

$x = 1, y = t = 0 \Rightarrow v_1=(1, 1, 0, 0)$

$y = 1, x = t = 0 \Rightarrow v_2= (0, -2, 1, 0)$

$t = 1, x = y = 0 \Rightarrow v_3= (0, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow E = \{(1, 1, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ base di V.

Completiamo E ad una base di R^4; potremmo usare il metodo degli scarti successivi estraendo da $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base. La matrice

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{riga aggiunta} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è ridotta (anzi triangolare alta), nessuna riga è nulla $\Rightarrow$ $S = L((0, 0, 1, 0))$

ESERCIZIO N° 2

Sia $\varphi:R^2 \to R^3$ l'applicazione definita da $\varphi(x_1, x_2) = (x_1+ x_2, x_1 - 2x_2, x_1)$.

Determinare la matrice associata a φ, M(φ), rispetto alle due basi canoniche.

Determinare la matrice associata φ, $M_{E, F}(\varphi)$, rispetto alle due basi:

$$E = \{(1, 1), (0, -1)\} \text{ di } R^2$$

$$F = \{(1, 1, 1), (1, -2, 0), (0, 0, 1)\} \text{ di } R^3$$

La matrice M(φ), avente per colonne $\varphi(e_1)$ e $\varphi(e_2)$, dove $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$ sono i versori fondamentali di R^2, si definisce matrice associata a φ rispetto alle basi canoniche rispettivamente di R^2 e R^3:

$\varphi(1, 0) = (1, 1, 1)$

$\varphi(0, 1) = (1, -2, 0)$

allora: $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che risulta essere la matrice incompleta del sistema

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

La matrice $M_{E, F}(\varphi)$, rispetto alle due basi E ed F ha per colonne le componenti di $\varphi(1, 1)$ e $\varphi(0, -1)$ rispetto alla base F.

Calcoliamo queste componenti.

Bisogna determinare una terna di numeri reali (α, β, γ) in modo tale che

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -2, 0) + \gamma(0, 0, 1) = \varphi(1, 1) = (2, -1, 1)$$

e un'altra terna (che per comodità continuiamo ad indicare con (α, β, γ)) tale che

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -2, 0) + \gamma(0, 0, 1) = \varphi(0, -1) = (-1, 2, 0)$$

Poiché $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -2, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (\alpha + \beta, \alpha - 2\beta, \alpha + \gamma)$, possiamo risolvere contemporaneamente i due sistemi nel seguente modo:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = (2,-1) \\ \alpha - 2\beta = (-1,2) \\ \alpha + \gamma = (1,0) \end{cases} \quad \text{da cui si ottiene facilmente che:}$$

$$\begin{cases} \alpha = (1,0) \\ \beta = (1,-1) \\ \gamma = (0,0) \end{cases}$$

$\varphi(1, 1) = (2, -1, 1) = 1\cdot(1, 1, 1) + 1\cdot(1, -2\ 0) + 0\cdot(0, 0, 1)$

$\varphi(0, -1) = (-1, 2, 0) = 0\cdot(1, 1, 1) + (-1)\cdot(1, -2, 0) + 0\cdot(0, 0, 1)$

si ha quindi: $M_{E,F}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (osserviamo che la matrice $M_{E,F}(\varphi)$ ha per righe rispettivamente α, β, γ).

ESERCIZIO N° 3

Sia $\varphi: R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Determinare la dimImφ e una base di Imφ.

Determinare la dimKerφ e una base di Kerφ.

Imφ è il sottospazio di R^4 generato dalle colonne di $M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Per trovare una base di Imφ dobbiamo ridurre $M(\varphi)$ per colonne:

$M(\varphi) \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ dim Im$\varphi = 2 \Rightarrow \{(1, 0, 1, 2), (1, 1, 0, 1)\}$ è una base di Imφ.

dim Ker$\varphi = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \varphi$ non è iniettiva.

Kerφ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$M(\varphi) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=y \end{cases} \quad (-y,\ y,\ y), \quad y\in R.$$

$\{(-1,\ 1,\ 1)\}$ è una base di Kerφ.

ESERCIZIO N° 4

Nello spazio vettoriale $R_2[x]$ dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti in R sono dati i vettori:

$$p_1 = x^2 + 2x + 1, \quad p_2 = 2x^2 + kx, \quad p_3 = kx^2 - x - 3.$$

Determinare i valori di k per cui p_1, p_2, p_3:

a) formano una base B di $R_2[x]$;
b) risultano linearmente dipendenti e trovare la relazione di dipendenza lineare.

Nel caso k = 0

c) trovare le componenti di x^2 rispetto alla base B;
d) considerata l'applicazione lineare $f_\lambda : R_2[x] \to R_2[x]$ definita da $f_\lambda(p) = p - \lambda p'$ con $\lambda \in R$. Trovare i valori di λ per cui essa è un isomorfismo.

---

a) $p_1=(1,\ 2,\ 1)$, $p_2=(2,\ k,\ 0)$, $p_3=(k,\ -1,\ -3)$

la relazione di dipendenza lineare si traduce analiticamente nell'equazione:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ k & -1 & -3 \end{vmatrix} = -k^2 - 3k + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -5 \ \vee k_2 = 2;$$

per $k \neq -5, 2$ $\quad p_1, p_2, p_3$ sono linearmente indipendenti.

b) se $k = 2 \Rightarrow a(x^2 + 2x + 1) + b(2x^2 + 2x) + c(2x^2 - x - 3) = 0 \quad \forall x\in R \Leftrightarrow$

$(a + 2b + 2c)x^2 + (2a + 2b - c)x + a - 3c = 0 \qquad \forall x\in R \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+2b+2c=0 \\ 2a+2b-c=0 \quad \text{(questa eq. è la somma delle altre due)} \\ a-3c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3c \\ 3c+2b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3c \\ b=-\dfrac{5}{2}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-2 \\ a=-6 \\ b=5 \end{cases} \qquad \text{è una delle infinite soluzioni}$$

per k = –5 si trova in maniera analoga $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

c) $x^2 = a(x^2 + 2x + 1) + b\cdot 2x^2 + c(-x-3) = (a+2b)x^2+(2a-c)x+a-3c=0 \quad \forall x\in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ 2a-c=0 \\ a-3c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=0 \end{cases} \qquad x^2 = (0, \tfrac{1}{2}, 0)_B$$

d)

$f_\lambda(e_1) = f_\lambda(x^2) = x^2 - 2\lambda x$;

$f_\lambda(e_2) = f_\lambda(x) = x - \lambda$;

$f_\lambda(e_3) = f_\lambda(1) = 1$

la matrice associata ad f_λ rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \rho(A) = \dim \operatorname{Im} f = 3 \;\Rightarrow\; \dim \operatorname{Ker} f = 0$$

$\Rightarrow$ f e un isomorfismo.

Un'alternativa più lunga è:

$p_1' = 2x + 2 \qquad p_2' = 4x \qquad p_3' = -1$

$f_\lambda(p_1) = x^2 + 2x + 1 - \lambda(2x+2) = x^2 + 2(1-\lambda)x + 1 - 2\lambda$

$f_\lambda(p_2) = 2x^2 - 4\lambda x$

$f_\lambda(p_3) = -x - 3 + \lambda$

la matrice associata ad f_λ rispetto alla base B e a quella canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2(1-\lambda) & -4\lambda & -1 \\ 1-2\lambda & 0 & -3+\lambda \end{pmatrix}$$

$|A| = -4\lambda(-3+\lambda) - 2[2(1-\lambda)(-3+\lambda) + 1 - 2\lambda] = 10 \neq 0$

$\Rightarrow \rho(A) = \dim \operatorname{Im} f_\lambda = 3 \;\Rightarrow\; \dim \operatorname{Ker} f_\lambda = 0 \;\Rightarrow f_\lambda$ e un isomorfismo.

ESERCIZIO N° 5

Studiare al variare dei parametri a, b $\in$R, l'applicazione lineare f:$R^3 \to R^4$ definita da:

$f(e_1) = (1, 1, a, 1)$; $f(e_2) = (a, 1, 2, 0)$; $f(e_3) = (1 - a, 0, 1, b)$.

La matrice associata a f è:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Un minore di ordine 2 non nullo è: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

I minori di ordine 3 contenenti questo minore sono:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = (1-a)(b-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 2b+1-ab$$

determiniamo i valori di a e b per cui si annullano contemporaneamente

$$\begin{cases} a-1=0 \\ 2b+1-ab=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1-b=0 \\ 2b+1-ab=0 \end{cases} \to \begin{cases} b=1 \\ a=3 \end{cases}$$

- $\boxed{\text{per } a = 1 \wedge b = -1}$, per il teorema di Kronecker per il rango di una matrice si ha: $\rho(A) = 2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e Imf} = \mathcal{L}((1, 1, 2, 0), (0, 0, 1, -1))$$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2\lambda+h \\ t=-h \end{cases} \quad \text{eq. parametriche di Imf;}$$

eliminando h e λ si ottengono le eq. cartesiane di Imf: $\begin{cases} y=x \\ z=2x-t \end{cases}$.

dim Kerf = 3 – 2 = 1

Ker f è l'insieme soluzione di $\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow (x, -x, x), \quad x\in R$

$\Rightarrow$Ker f = $\mathscr{L}((1, -1, 1))$

- $\boxed{\text{per } a = 3 \wedge b = 1}$, per il teorema di Kronecker per il rango di una matrice si ha: $\rho(A) = 2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e Imf} = \mathscr{L}((1, 1, 3, 1), (-2, 0, 1, 1))$$

$$\begin{cases} x = \lambda - 2h \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda + h \\ t = \lambda + h \end{cases} \quad \text{eq. parametriche di Imf;}$$

eliminando h e λ si ottengono le eq. cartesiane di Imf: $\begin{cases} x - 3y + 2t = 0 \\ 2y - z + t = 0 \end{cases}$.

dim Kerf = 3 – 2 = 1

Ker f è l'insieme soluzione di $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, -x, -x), \quad x \in R$

$\Rightarrow$Ker f = $\mathscr{L}((1, -1, -1))$

- In tutti gli altri casi $\Rightarrow$ $\rho(A)=3$ $\Rightarrow$ dim Imf = 3 $\Rightarrow$ dim Ker f = 0 $\Rightarrow$ f è iniettiva

$$\Rightarrow \quad \text{Imf:} \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ a & 2 & 1 & z \\ 1 & 0 & b & t \end{vmatrix} = 0$$

una base è l'insieme costituito dai vettori colonna di A.

ESERCIZIO N° 6

Studiare al variare del parametro a l'applicazione lineare $f:R^3 \to R^3$ definita da:
$f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $f(0, 1, 2) = (a, a^2, a)$, $f(1, -1, 0) = (1, a, -1)$.
Determinare, in particolare, al variare di a

1) Kerf, Imf;
2) La matrice associata alla f rispetto alle basi canoniche, E;
3) L'immagine inversa del vettore (a+2, 3, a)

Da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \quad B=\{ (1, 0, 0), (0, 1, 2), (1, -1, 0) \} \text{ è una base di } R^3.$$

La matrice associata alla f rispetto alla base B e alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$|A| = -a^2 + a + a^2 - a^2 - a^2 + a = -2a^2 + 2a = 2a(1 - a)$

- Se $\boxed{a \neq 0, 1} \Rightarrow$ Imf = R^3 perché dim Imf = $\rho(A) = 3 \Rightarrow$ Kerf = $\{0_{R^3}\} \Rightarrow$ f è un isomorfismo.

- Se $\boxed{a = 0} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rho(A) = 2 \Rightarrow$ dim Imf = 2 $\Rightarrow$ dim Kerf = 1;

  le soluzioni del sistema sono le componenti dei vettori di Kerf rispetto alla base B :

  $$\begin{cases} x = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (0, y, 0) \quad y \in R \Rightarrow y(0, 1, 2) \in \text{Kerf} \quad y \in R.$$

  $\Rightarrow$Ker f = $\mathscr{L}((0, 1, 2))$ retta passante per O di numeri direttori 0,1,2

  Imf = $\mathscr{L}((1, 1, 1), (1, 0, -1))$ e la sua equazione cartesiana è:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad x - 2y + z = 0 \text{ piano passante per O}$$

- Se $\boxed{a = 1} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\rho(A) = 2$

$\Rightarrow$ Imf = $\mathscr{L}((1, 1, 1), (1, 1, -1)$ e la sua equazione cartesiana è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad x - y = 0$$

le soluzioni del sistema sono le componenti dei vettori di Kerf rispetto alla base B :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad (x, -x, 0) \quad x\in R \Rightarrow x(1, 0, 0) -x(0, 1, 2)=$$

$$\overline{\qquad\qquad} \\ 2z=0$$

$(x,-x,-2x) \in$ Kerf $x\in R$.

$\Rightarrow$Ker f = $\mathscr{L}((1,-1,-2))$ retta passante per O di numeri direttori 1,-1,-2

2) $f(1, 0, 0) = f(e_1) = (1, 1, 1)$

$$f(0, 1, 2) = f(0\, e_1 + 1\, e_2 + 2\, e_3) \overset{f \text{ è lineare}}{=} 1f(e_2) + 2f(e_3) = (a, a^2, a)$$

$\rightarrow 2f(e_3) = (a, a^2, a) - f(e_2)$

$f(1, -1, 0) = f(e_1) - f(e_2) = (1, a, -1)$

$\rightarrow f(e_2) = f(e_1) - (1, a, -1)$

$$\rightarrow f(e_2) = (0, 1-a, 2), \quad f(e_3) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2+a-1}{2}, \frac{a-2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M_{E,E}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{2} \\ 1 & 1-a & \frac{a^2+a-1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{a-2}{2} \end{pmatrix}$$

3) per $\boxed{a \neq 0,1}$

$f^{-1}(a+2, 3, a)$ è l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{a}{2}z = a+2 \\ x + (1-a)y + \frac{a^2+a-1}{2}z = 3 \\ x + 2y + \frac{a-2}{2}z = a \end{cases}$$ che si può risolvere con la regola di Cramer.

Un'alternativa più lunga è:

$f^{-1}(a+2, 3, a)$ ha per componenti, rispetto alla base B, l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = a+2 \\ x + a^2y + az = 3 \\ x + ay - z = a \end{cases}$$ che si può risolvere con la regola di Cramer.

Per $\boxed{a = 0}$ (2, 3, 0) non è soluzione di $x - 2y + z = 0$ $\Rightarrow$ $(2, 3, 0) \notin$ Imf $\Rightarrow$ non esiste $f^{-1}(2, 3, 0)$.

Analogamente per a = 1.