ESERCIZIO N° 1

Stabilire per quali valori del parametro reale h la seguente matrice ha rango 0,1,2,3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix}$$

Riduciamo A per righe:

$$A \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \\ 0 & h & 0 & h \end{pmatrix}$$

Per h = 0 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è ridotta ed ha due righe non nulle $\Rightarrow \rho(A) = 2$

Per $h \neq 0$ A non è ridotta

Usando la trasformazione $R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \\ 0 & \frac{h-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per h = 1$\to$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è ridotta ed ha due righe non nulle $\Rightarrow \rho(A) = 2$

per $h \neq 0, 1$ tutte le righe sono non nulle $\Rightarrow \rho(A) = 3$

ESERCIZIO N° 2

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=2 \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

Riduciamo dapprima il sistema, la matrice completa è:

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{cases} x+y+z=3 \\ -2z=-1 \\ -2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Si poteva risolvere con la regola di Cramer:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 1(1+1) + 1(-1-1) = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ il sistema ammette una ed una sola soluzione $\left(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ che si ottiene così:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO N° 3

Discutere, al variare del parametro k, il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx+(k-1)y+2kz=k^2-1 \\ kx+ky \qquad\qquad\quad =1-k \\ 2x+y \qquad\quad +2z \;\;=0 \end{cases}$$

E' un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite.

Il determinante D del sistema è

$$D=\begin{vmatrix} k & k-1 & 2k \\ k & k & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = k\cdot 2k - (k-1)2k + 2k(k-2k) = -2k(k-1)$$

Per $k\neq 0,\ 1$ il sistema (per Cramer) ammette una ed una sola soluzione.

Per k=0

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \rho(A) = 2,\ \rho(A, B) = 3 \Rightarrow \text{il sistema è impossibile;}$$

infatti:

$$\begin{cases} -y=-1 \\ 0=1 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \qquad \text{impossibile}$$

Per k=1

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \rho(A)=\rho(A,B)=2 \quad \Rightarrow \quad \text{il}$$

sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni; infatti:

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad (-2z,\ 2z,\ z),\ \ z\in R.$$

ESERCIZIO N° 4

Discutere, al variare dei parametri $a,b\in R$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

E' un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite.

Il determinante D del sistema è

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a(a^2b-b)-b(a-1)+b-ab = b(a^3-3a+2) = b(a-1)(a^2+a-2)$$

$$= b(a-1)^2(a+2).$$

1. Per $b\neq 0 \wedge a\neq 1, -2$ il sistema ammette una ed una sola soluzione che si può determinare con il metodo di Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)}=\frac{a^2b+\cancel{b}+b^2-ab-ab^2-\cancel{b}}{b(a-1)^2(a+2)}=\frac{\cancel{b}(a-1)(a-b)}{\cancel{b}(a-1)^2(a+2)}=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)};$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)}=\frac{a^2b+1+1-b-a-a}{b(a-1)^2(a+2)}=\frac{(a-1)(ab+b-2)}{b(a-1)^2(a+2)}=\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)}=\frac{a^2b+b^2+\cancel{b}-ab-\cancel{b}-ab^2}{b(a-1)^2(a+2)}=\frac{\cancel{b}(a-1)(a-b)}{\cancel{b}(a-1)^2(a+2)}=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}.$$

2. Per $b = 0 \rightarrow$ la matrice completa del sistema è: $(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$

Tutte le sue sottomatrici del terzo ordine contenenti la seconda colonna avrebbero determinante nullo; allora, consideriamo M, quella formata dalle colonne 1^a, 3^a e 4^a:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a - 1 + a - 1 = 2(a-1)$$

- allora se a = 1 anche questo determinante sarebbe nullo $\Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{\text{per } b = 0 \ \wedge a = 1} \rightarrow (A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $\rho(A, B) = 2 \quad \rho(A) = 1 \quad \Rightarrow$ il sistema è impossibile (Teorema di Rouchè – Capelli).

- per $a \neq 1 \Rightarrow \rho(A, B) = 3$, ma $\rho(A) = 2 \quad \Rightarrow \boxed{\text{per } b = 0 \ \wedge a \neq 1}$ il sistema è impossibile

3. Per a = 1 $\rightarrow (A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 \to R_1 - R_3}{\overset{R_2 \to R_2 - R_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Se $b \neq 1$ il sistema è impossibile poiché A e (A, B) sono ridotte e A ha una sola riga non nulla e (A, B) ha due righe non nulle $\Rightarrow \rho(A, B) = 2 \neq \rho(A) = 1$; infatti si ha :
  $$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ 0 = b - 1 \qquad \text{impossibile} \end{cases}$$
- se b = 1 il sistema è indeterminato ed ammette $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni, le soluzioni della equazione $x + y + z = 1 \rightarrow (x, y, 1-x-y) \quad x, y \in R$

4. per a = –2

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_1 + R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to 2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array}\right) \quad \text{che è ridotta}$$

- Se $b \neq -2$ il sistema è impossibile poiché A e (A, B) sono ridotte e A ha due righe non nulle e (A, B) ha tre righe non nulle $\Rightarrow \rho(A, B) = 3 \neq \rho(A) = 2$; infatti si ha:
  $$\begin{cases} -2x + by + z = 1 \\ 3by - 3z = -2b - 1 \\ 0 = -2(b-2) \qquad \text{impossibile} \end{cases}$$
- se b = -2 il sistema è indeterminato ed ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni: $\begin{cases} -2x - 2y + z = 1 \\ -6y - 3z = +3 \end{cases} \quad \left(z, -\frac{z+1}{2}, z\right) \quad z \in R$