ESERCIZIO N° 1

Sia $\varphi : R^3 \to R^3$ l'endomorfismo definito da:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2, x_1 - x_2, hx_1 + hx_3).$$

Stabilire per quali valori di h l'endomorfismo φ è semplice.

La matrice associata a φ è:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ h & 0 & h \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico di φ è: $|M(\varphi) - \lambda I| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ h & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = (h-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3] = (h-\lambda)(-1+\lambda^2-3] = (h-\lambda)(\lambda^2-4)$$

Gli autovalori sono dunque le soluzioni reali del polinomio caratteristico:

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = h$.

se $h \neq \pm 2$ esse sono anche distinte; quindi φ è semplice;

se $h = 2$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità 2;

$\lambda_2 = -2$ con molteplicità 1.

Per stabilire se φ è semplice dobbiamo calcolare $\rho(M(\varphi) - 2I)$

$$M(\varphi) - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(M(\varphi) - 2I) = 2 \Rightarrow \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 2$$ (la molteplicità

di λ_1) $\Rightarrow$ φ non è semplice.

In maniera analoga se $h = -2 \Rightarrow$ φ non è semplice.

ESERCIZIO N° 2

Stabilire per quali valori di $h \in R$ l'endomorfismo $\varphi : R^3 \to R^3$ definito da:

$$\varphi(x, y, z) = (-2hx - y + hz, x + z, hz)$$

è semplice.

La matrice associata a φ è:

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} -2h & -1 & h \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico di φ è: $|M(\varphi) - \lambda I| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2h-\lambda & -1 & h \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = (h-\lambda)[(-2h-\lambda)(-\lambda) + 1] = (h-\lambda)(\lambda^2 + 2h\lambda + 1)$$

Gli autovalori sono dunque le soluzioni reali del polinomio caratteristico:
Consideriamo il discriminante dell'equazione $\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0$: $\Delta = h^2 - 1 \Rightarrow$ l'equazione avrà soluzioni reali se $\Delta \geq 0$.

Allora:

- per $-1 < h < 1$ φ non è semplice perché non ha tutti gli autovalori reali.
- per $h < -1 \vee h > 1 \Rightarrow \lambda_1 = h$, $\lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - 1}$, $\lambda_3 = -h + \sqrt{h^2 - 1}$ con λ_1, λ_2, λ_3 distinti; infatti: $h = -h \pm \sqrt{h^2 - 1} \Leftrightarrow 2h = \pm \sqrt{h^2 - 1} \Leftrightarrow 4h^2 = h^2 - 1 \Leftrightarrow 3h^2 = -1 \Rightarrow$ impossibile $\Rightarrow \varphi$ è semplice.
- per $h = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ semplice e $\lambda_2 = -1$ doppia. Dobbiamo calcolare il rango di $M(\varphi) + I$ $(h = 1, \lambda = -1)$:

  $M(\varphi) + I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ il rango è 2 $\Rightarrow \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 2$ (la molteplicità di λ_2) $\Rightarrow$ φ non è semplice.
- per $h = -1 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ semplice e $\lambda_2 = 1$ doppia. Dobbiamo calcolare il rango di $M(\varphi) + I$ $(h = -1, \lambda = 1)$:

  $M(\varphi) + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ il rango è 2 $\Rightarrow \dim V_2 = 3 - 2 = 1 \neq 2$ (la molteplicità di λ_2) $\Rightarrow$ φ non è semplice.

ESERCIZIO N° 3

Sia $\varphi : K^n \to K^n$ un isomorfismo. Dimostrare che:

a) tutti gli autovalori di φ sono non nulli;
b) se λ è un autovalore di φ allora λ^{-1} è un autovalore di φ^{-1}

---

a) Sia λ un autovalore di $\varphi \Rightarrow \exists\ v \in K^n,\ v \neq 0_{K^n} : \varphi(v) = \lambda v \neq 0_{K^n}$ perché φ è iniettiva $\Rightarrow \lambda \neq 0$
b) Sia $v \neq 0_{K^n}$ un autovettore associato a $\varphi \Rightarrow$
$\varphi(v) = \lambda v \Rightarrow v = \varphi^{-1}(\lambda v) \overset{\varphi^{-1} \text{è applicazione lineare}}{=} \lambda\varphi^{-1}(v) \Rightarrow \varphi^{-1}(v) \overset{\lambda\neq 0}{=} \lambda^{-1}v \Rightarrow$ la Ts in quanto $v \neq 0_{K^n}$

ESERCIZIO N° 4

Sia $\varphi : R^n \to R^n$ un isomorfismo semplice. Dimostrare che φ^{-1} è semplice.

Segue osservando che se v è un autovettore di φ allora v è un autovettore di φ^{-1}

ESERCIZIO N° 5

Stabilire se la seguente matrice reale è diagonalizzabile come matrice reale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3,3}$$

in caso affermativo, diagonalizzarla.

A è diagonalizzabile se e solo se $\varphi_A : R^3 \to R^3$ è semplice. Il polinomio caratteristico di A è $|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 3\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(3 - \lambda)$ ed ha le radici $\lambda_1 = 0$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = 3$ semplice. Per vedere se A è diagonalizzabile bisogna verificare se $\rho(A - 0I) = 3 - 2 = 1$. Ciò è vero, quindi A è diagonalizzabile.

Diagonalizzare A significa trovare una matrice invertibile $P \in R^{3,3} : P^{-1}AP$ matrice diagonale. Basta prendere come P la matrice che ha per colonne $v_1, v_2, \ldots v_n$ gli autovettori che insieme formano una base di R^3 (φ_A è semplice)

Per $\lambda = 0 \Rightarrow V_0 = \mathrm{Ker}\ \varphi_A$ è l'insieme soluzione dell'equazione $x + y + z = 0$

$(-y - z, y, z)$, $y, z \in R \Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\ \varphi_A = L((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$

Per $\lambda = 3 \Rightarrow V_3 = \mathrm{Ker}\ \varphi_{A,3}$ che è l'insieme soluzione del sistema

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

$$-3x + 3y = 0$$

(x, x, x), $x \in R$

$\mathrm{Ker}\ \varphi_{A,3} = L(1,1,1)$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Risulta inoltre :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che sulla diagonale vi sono gli autovalori 0 e 3 ciascuno ripetuto con la sua molteplicità.